

文章编号: 1006-9941(2015)03-0270-05

基于广义线性模型的火工品可靠性数据分析

洪东跑¹, 王英华¹, 管飞¹, 温玉全²

(1. 中国运载火箭技术研究院, 北京 100076; 2. 北京理工大学爆炸科学与技术国家重点实验室, 北京 100081)

摘要: 为提高小样本量下火工品可靠性分析的精度, 依据火工品感度试验与可靠性分析的特点, 提出了一种基于广义线性模型的火工品可靠性分析方法。该方法通过函数变换, 将样本似然函数转换为二项分布变量的广义线性表达式, 由此, 得到感度分布参数的极大似然估计及其相应算法, 再根据极大似然估计的渐近正态性, 对可靠度函数进行了 logit 变换, 给出了火工品可靠度置信下限。通过某针刺雷管 ($\gamma=0.95, R \geq 0.999$) 和电雷管 ($\gamma=0.95, R \geq 0.9999$) 对该方法进行了实验验证, 并与大样本试验数据分析结果进行对比, 结果表明该方法合理可行, 可利用约 150 个样本对可靠性要求为 0.999 以上的火工品进行有效评价。

关键词: 飞行器设计; 火工品; 可靠性分析; 广义线性模型; 感度试验

中图分类号: TJ55, TB114.3

文献标志码: A

DOI: 10.11943/j.issn.1006-9941.2015.03.013

1 引言

在航天领域, 火工品承担着一系列有关飞行器点火、姿态控制、分离等控制指令的执行, 对飞行器飞行成败起到关键性的作用, 是飞行器的关键元件。火工品可靠性要求高, 需要有效的评价方法, 作为高可靠性要求的敏感性产品, 在国内外的工程应用中, 一般利用感度试验数据来进行可靠性分析。即假设每个产品均存在一个临界刺激量, 当外界施加的刺激量大于临界刺激量时, 该产品“响应”; 否则“不响应”^[1]。同时假定临界刺激量服从某分布, 按照一定试验方法施加不同的刺激量进行感度试验, 并利用试验数据进行可靠性分析^[2-3]。由于火工品的临界刺激量不能直接测量, 只能在若干刺激量下通过刺激试验来测定。每个火工品样本只能做一次试验, 即使施加了刺激量不响应, 也会破坏其结构^[4]。故感度试验所获得的数据为施加的刺激量和相应的“响应”或“不响应”数, 无法获得精确的临界刺激量。同时不同的方法获得的试验数据差异较大, 数据分析方法也不完全一致。特别当样本量较小时, 分析结果可能会有较大的偏差, 影响了火工品可靠性分析的精度。而且利用感度试验数据进行参数估计时无法获得解析解, 而利用数值算法求解时, 其收敛性依赖于迭代初始值。由广义线性模型的相关

研究^[5-7]可知, 该模型可有效地弥补数值算法中参数估计迭代不收敛或收敛慢的不足。

为此, 本研究根据火工品可靠性数据分析的工程需求, 探索了不同类型感度试验数据的共性特点和内在规律, 采用广义线性模型描述了火工品可靠性与感度的关系, 给出一种火工品可靠性数据分析方法, 在小样本下实现对高可靠性要求的火工品可靠性分析。

2 感度试验数据特点分析

工程中常用的感度试验方法有升降法^[1]、Langlie 法^[2]、E 方法^[8]、D 优化方法^[4]等。由于升降法试验操作相对简单, 是工程中最常用的火工品感度试验方法^[9]。为此, 本研究以升降法试验为例, 分析了火工品感度试验数据的特点。

升降法试验包括三个因素: 试验样本量 N 、初始刺激量 x_0 和步长 d 。 x_0 和 d 选定后, 用 x_0 作第一次刺激-响应试验; 第二次及以后每次试验所用刺激量的取法如下: 如前一次试探的反应结果为“响应”, 则本次试探用刺激量为 $x_{i+1} = x_i - d$; 如为“不响应”, 则为 $x_{i+1} = x_i + d$ 。如此循环试验, 至完成预定试验样本量 N 为止。对升降法试验数据进行统计分析, 按刺激量的升序排列, 可表示成如下形式:

$$\begin{Bmatrix} x_1, x_2, \dots, x_k \\ n_1, n_2, \dots, n_k \\ m_1, m_2, \dots, m_k \end{Bmatrix} \quad (1)$$

收稿日期: 2014-01-12; 修回日期: 2014-04-16

作者简介: 洪东跑(1983-), 男, 博士, 主要从事可靠性统计研究。

e-mail: hloving@163.com

式中, k 为刺激量个数, $x_i (i=1, 2, \dots, k)$ 为试验刺激量, m_i 为在 x_i 试验的不响应数, n_i 为在 x_i 试验的响应数。

本研究对 Langlie 法、E 方法、D 优化方法等试验数据也进行了分析, 由分析结果可知, 火工品的可靠性试验数据可统一表示成式(1)的形式。

3 基于广义线性模型的可靠性数据分析

3.1 感度分布函数

火工品的临界刺激量分布函数又称感度分布函数。工程中常用的火工品感度分布为正态分布、对数正态分布、Logistic 分布和对数 Logistic 分布^[3], 其中对数正态分布和对数 Logistic 分布可通过对数变换, 分别转换为正态分布和 Logistic 分布^[10]。对于正态分布和 Logistic 分布, 记火工品感度为 X , 可用位置-刻度模型^[10]来统一表示:

$$X = \mu + \sigma \varepsilon \quad (2)$$

式中, μ 为位置参数, σ 为刻度参数, ε 为分布函数是 $G(\cdot)$ 的随机变量, 其中 $G(\cdot)$ 与位置参数及刻度参数无关。

给定工作刺激量 x , 由式(2)可得火工品的可靠度函数:

$$R(x) = G\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \quad (3)$$

如果 x 服从正态分布, 则 $G(\cdot)$ 为标准正态分布函数, $G(t) = \Phi(t)$; 如果 x 服从 Logistic 分布, 则 $G(\cdot)$ 为标准 Logistic 分布函数, $G(t) = \frac{\exp(t)}{1+\exp(t)}$ 。

3.2 分布参数极大似然估计

已知感度分布函数 $G\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$, 结合式(1)的感度试验数据可得似然函数:

$$L = \prod_{i=1}^k C_i \left(G\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right) \right)^{n_i} \left(1 - G\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right) \right)^{m_i} \quad (4)$$

由式(4)的对数似然函数可以求得感度分布参数 μ 和 σ 的极大似然估计。由于没有解析解, 一般利用解非线性方程组的数值方法来求解。然而数值方法中迭代算法的收敛性依赖于迭代初始值, 如何确定适当的初始值以确保算法收敛一直是个难题。

为此, 本研究利用广义线性模型^[5-6]给出了一种有效的算法, 用于求解感度分布参数的极大似然估计。

令 $\beta_1 = -\frac{\mu}{\sigma}, \beta_2 = \frac{1}{\sigma}$, 则感度分布函数可变换为

$G(\beta_1 + \beta_2 x)$, 代入式(4)可得对数似然函数:

$$l = \sum_{i=1}^k (n_i \ln(G(\beta_1 + \beta_2 x_i)) + m_i \ln(1 - G(\beta_1 + \beta_2 x_i))) \quad (5)$$

由广义线性模型的性质可知, 式(5)对数似然函数可看成连接函数为 $G(\beta_1 + \beta_2 x)$ 的二项分布变量的广义线性表达式^[5]。对于广义线性模型, 一般利用迭代加权方法来求得未知参数的极大似然估计。令 $\beta = (\beta_1, \beta_2)'$, 假设单个响应变量 $n_i (i=1, 2, \dots, k)$ 的对数似然函数为 $l_i(\rho_i)$, 其中 $\rho_i = \beta_1 + \beta_2 x_i$, 则式(5)的似然函数可变换为:

$$l(\beta) = \sum_{i=1}^k l_i(\rho_i) \quad (6)$$

记 $f_i(\beta) = \frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_i} (i=1, 2)$, 则参数 β 的极大似然估计 $\hat{\beta}$ 满足:

$$f_i(\hat{\beta}) = 0 \quad (i=1, 2) \quad (7)$$

记 $f(\beta) = (f_1(\beta), f_2(\beta))'$, $\rho = (\rho_1, \rho_2)'$, $u(\beta) = \left(\frac{\partial l(\beta)}{\partial \rho_1}, \frac{\partial l(\beta)}{\partial \rho_2} \right)'$, 则有 $f(\beta) = \frac{\partial \rho'}{\partial \beta} u(\beta)$, 故式(7)可表示为矩阵形式:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial \beta} u(\beta) \Big|_{\beta=\hat{\beta}} = 0 \quad (8)$$

在 β 处对 $\frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta}$ 进行 Taylor 展开可得:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial \beta} u(\beta) + \left[\sum_{i=1}^2 \frac{\partial \rho_i}{\partial \beta} \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \rho_i^2} \frac{\partial \rho_i}{\partial \beta'} \right] (\hat{\beta} - \beta) \cong 0 \quad (9)$$

记 $J(\beta) = - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \rho_i}{\partial \beta} \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \rho_i^2} \frac{\partial \rho_i}{\partial \beta'}$, 假设 $J(\beta)$ 可逆, 则有:

$$\hat{\beta} \cong \beta + J(\beta)^{-1} \frac{\partial \rho'}{\partial \beta} u(\beta) \quad (10)$$

因此给定初值 β , 利用式(10)进行迭代可得极大似然估计 $\hat{\beta}$, 该迭代方法是 Newton-Raphson 算法的特殊应用^[11]。在实际应用中, 用 $J(\beta)$ 的期望 $I(\beta)$ 来代替 $J(\beta)$ 将更为方便, $I(\beta)$ 为:

$$I(\beta) = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \rho_i}{\partial \beta} E \left(- \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \rho_i^2} \right) \frac{\partial \rho_i}{\partial \beta'} \quad (11)$$

式(11)可表示为矩阵形式:

$$I(\beta) = U' W(\beta) U \quad (12)$$

式中, $U = \frac{\partial \rho}{\partial \beta}$, $W(\beta)$ 为对角矩阵, 其第 i 个元素为 E

$\left(- \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \rho_i^2} \right)$ 。用 $I(\beta)$ 代替 $J(\beta)$, 则式(10)可转换为:

$$\hat{\beta} = (U' W U)^{-1} U' W (U \beta + W^{-1} u) \quad (13)$$

式中, 依赖于初值 β 的部分已被抑制, 通过迭代直到满足预定的精度要求, 可得参数 β 的极大似然估计。

当火工品感度服从正态分布, 可取连接函数为 $G(\beta_1 + \beta_2 x) = \Phi(\beta_1 + \beta_2 x)$, 由式(13)可得参数极大似然估计 $\hat{\beta}$; 当感度服从 Logistic 分布时, 取连接函数为 $G(\beta_1 + \beta_2 x) = \frac{\exp(\beta_1 + \beta_2 x)}{1 + \exp(\beta_1 + \beta_2 x)}$, 由式(13)可得参数极大似然估计 $\hat{\beta}$ 。已知参数估计 $\hat{\beta}$, 可得感度分布参数估计

$$\hat{\sigma} = \hat{\beta}_2, \hat{\mu} = -\frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\beta}_2}.$$

3.3 可靠性分析

给定工作刺激量 x , 把感度分布参数估计 $(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$ 代入式(3)可得火工品的可靠度估计:

$$\hat{R}(x) = G\left(\frac{x - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right) \quad (14)$$

在工程应用中, 通常还需要获得可靠度置信下限。由于难以获得 $R(x)$ 的分布, 无法直接利用传统的区间估计方法。然而, 相对而言一般比较容易获得近似区间估计, 而且大多数情况它们没有显著差异, 故通常利用近似区间估计来代替。

由 Wald 统计量^[12]可知, 在一定条件下, 极大似然估计 $\hat{\beta}$ 具有渐近正态性

$$\frac{\hat{\beta} - \beta}{I(\hat{\beta})^{-1}} \approx N(0, 1) \quad (15)$$

其中 $I(\hat{\beta})$ 为 Fisher 信息矩阵的估计。记 $h(\beta)$ 为 β 的函数, 由式(15)可得:

$$\frac{h(\hat{\beta}) - h(\beta)}{\sqrt{J'_h(\hat{\beta}) I^{-1} J_h(\hat{\beta})}} \approx N(0, 1) \quad (16)$$

式中, $J_h(\beta) = \left(\frac{\partial h(\beta)}{\partial \beta_1}, \frac{\partial h(\beta)}{\partial \beta_2}\right)$, 利用式(16)可得 $h(\beta)$ 的近似区间估计^[13]。由于火工品可靠度 $R(x)$ 为关于参数 β 的连续可导函数, 故可取 $h(\beta) = R(x)$, 由式(16)来求可靠度 $R(x)$ 的置信区间。由于可靠度函数的取值区间为 $(0, 1]$, 而正态分布随机变量的取值为 $(-\infty, \infty)$, 为了使参数估计更好地满足正态分布的性质, 需要对其进行 logit 变换, 取 $h(\beta) = \ln\left(\frac{R(x)}{1 - R(x)}\right)$, 给定置信水平 $1 - \alpha$, 可得火工品在工作刺激量 x 的可靠性置信下限:

$$R_L(x) = \left(1 + \frac{1 - R(x)}{R(x)} \exp(z_{1-\alpha} \sigma_h)\right)^{-1} \quad (17)$$

式中, $\sigma_h = \sqrt{J'_h(\hat{\beta}) I^{-1} J_h(\hat{\beta})}$, $z_{1-\alpha}$ 为标准正态分布的 $1 - \alpha$ 分位点。

4 实验验证

例 1 某针刺雷管可靠性指标为: 置信水平 $\gamma = 0.95$, 可靠度 $R \geq 0.999$, 工作刺激量为: 落锤重量 (52 ± 1) g, 落高 6 cm。

对该火工品进行三组升降法试验, 试验结果如表 1 所示。

表 1 某针刺雷管升降法试验数据

Table 1 Up-down test data of stab detonator

stimulus /cm	group A		group B		group C	
	response number	nonresponse number	response number	nonresponse number	response number	nonresponse number
1.0	0	1	0	1	0	1
1.5	1	7	1	10	1	7
2.0	7	14	10	11	7	14
2.5	14	3	11	3	14	3
3.0	3	0	3	0	3	0

根据工程经验可知该火工品的感度服从对数正态分布。通过把对数正态分布变换为正态分布, 综合利用表 1 中的三组升降法试验数据进行可靠性分析。取连接函数为 $\Phi(\beta_1 + \beta_2 x)$, 利用广义线性模型可得参数 β 的极大似然估计 $(\hat{\beta}_1 = -3.33, \hat{\beta}_2 = 4.54)$, 进而可得分布参数的估计 $(\hat{\mu} = 0.734, \hat{\sigma} = 0.22)$ 。给定置信水平为 $\gamma = 0.95$ 和工作刺激量水平 $x = 6$ cm, 结合参数估计的渐近正态性质, 由式(17)可得可靠性下限 $R_{L1} = 0.9996$, 故该火工品的可靠性达到了指标要求。

由于步进法试验样本量较大, 其参数估计较为稳定, 将本方法的分析结果与利用步进法试验数据的分析结果进行对比, 以验证本方法的合理性, 该火工品的步进法试验数据如表 2 所示。

给定置信水平为 $\gamma = 0.95$ 和工作刺激量水平 $x = 6$ cm, 对表 2 中的试验数据进行分析可得可靠性下限 $R_{2L} = 0.9998$, 故该火工品的可靠性达到了指标要求。

通过对两种方法给出的针刺雷管可靠性下限进行对比分析可知, 本方法给出的可靠性下限为 0.9996, 略低于大样本方法给出的 0.9998。经理论分析可知, 当试验样本来源于同一总体时, 试验样本量越大, 参数

置信区间越窄,故本研究给出的结果略低于大样本方法是合理的。

表 2 某针刺雷管步进法试验数据

Table 2 Run-down test results of stab detonator

stimulus/cm	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5
test number	400	200	200	200	200	200	200	200
response number	0	24	89	138	184	191	199	200

例 2 某电雷管可靠度指标为: 置信水平 $\gamma=0.95$, 可靠度 $R \geq 0.9999$, 工作刺激量为: 700 mA 电流。

对该火工品进行三组升降法试验, 试验结果如表 3 所示。

表 3 某电雷管升降法试验数据

Table 3 Up-down test results of electronic detonator

stimulus /cm	group A		group B		group C	
	response number	nonresponse number	response number	nonresponse number	response number	nonresponse number
300	0	1	0	1	0	1
320	1	7	1	10	1	8
340	7	12	10	9	8	11
360	12	4	9	4	11	4
380	4	1	4	1	4	1
400	1	0	1	0	1	0

根据工程经验可知该火工品的感度服从对数 Logistic 分布。通过把对数 Logistic 分布变换为 Logistic 分布, 综合利用表 3 中的三组升降法试验数据进行可靠性分析。取连接函数为 $\frac{\exp(\beta_1 + \beta_2 x)}{1 + \exp(\beta_1 + \beta_2 x)}$, 利用广义线性模型可得参数 β 的极大似然估计 ($\hat{\beta}_1 = -130.19$, $\hat{\beta}_2 = 22.27$), 进而可得分布参数的估计 ($\hat{\mu} = 5.846$, $\hat{\sigma} = 0.045$)。给定置信水平为 $\gamma=0.95$ 和工作刺激量水平 $x=700$ mA, 结合参数估计的渐近正态性质, 由式 (17) 可得该火工品的可靠性下限 $R_{3L} = 0.99998$, 故该火工品的可靠性达到了指标要求。

同样地将本方法的分析结果与利用步进法试验数据的分析结果进行对比, 收集了该火工品试验样本量为 1800 发的步进法试验数据。给定置信水平为 $\gamma=0.95$ 和工作刺激量水平 $x=700$ mA, 利用步进法试验数据可得可靠性下限 $R_{4L} = 0.99999$, 故该火工品的可靠性达到了指标要求。

通过对两种方法给出的电雷管可靠性下限进行对

比分析可知, 本文方法给出的可靠性下限为 0.99998, 略低于大样本方法给出的 0.99999, 其原因与针刺雷管可靠性分析结果一致。

结合上述两种火工品的分析结果, 对比分析可知本文方法是合理可行的, 可以利用约 150 个样本实现对可靠性要求为 0.999 以上的火工品进行有效地可靠性评价。

5 结 论

根据不同类型感度试验数据的共性特点和内在规律, 利用广义线性模型来描述火工品可靠性与感度的关系, 给出了适用于火工品感度试验数据的参数估计方法及相应算法, 有效地改善了参数估计算法的收敛性过于依赖初始值的缺点。同时, 结合参数的渐近正态性质, 给出了火工品可靠度置信下限, 提高了可靠性分析精度。分别以某针刺雷管和电雷管的为例, 综合利用其多组升降法试验数据进行可靠性分析, 并与利用大样本步进法试验数据分析结果进行对比, 结果表明本方法合理可行, 可以利用约 150 个样本实现对可靠性要求为 0.999 以上的火工品进行有效地可靠性评价。

参考文献:

- [1] Dixon W J, Mood H M. A method for obtaining and analyzing sensitivity data[J]. *Journal of the American Statistical Association*, 1948, 43(241): 109-126.
- [2] 洪东跑, 赵宇, 温玉全. 基于序约束的火工品可靠性试验数据分析[J]. *含能材料*, 2008, 16(5): 556-559. HONG Dong-pao, ZHAO Yu, WEN Yu-quan. Order restricted analysis of reliability tests for explosive initiator[J]. *Chinese Journal of Energetic Materials (Hanneng Cailiao)*, 2008, 16(5): 556-559.
- [3] 蔡瑞娇, 翟志强, 董海平, 等. 火工品可靠性评估试验信息熵等值方法[J]. *含能材料*, 2007, 15(1): 79-82. CAI Rui-jiao, ZHAI Zhi-qiang, DONG Hai-ping, et al. Assessment method for reliability of initiating devices based on test information entropy equivalence[J]. *Chinese Journal of Energetic Materials (Hanneng Cailiao)*, 2007, 15(1): 79-82.
- [4] Barry T Neyer. A D-optimality-based sensitivity test[J]. *Technometrics*, 1994, 1: 61-70.
- [5] Uusipaikka E. Confidence intervals in generalized regression models[M]. London: Chapman&Hall/CRC, 2009: 176-178.
- [6] McCullagh P, Nelder J A. Generalized linear models[M]. London: Chapman and Hall, 1989: 130-135.
- [7] Wendai W, Dimitri B K. Fitting the weibull log-linear model to accelerated life-test data [J]. *IEEE Transaction on Reliability*, 2000, 49(2): 217-223.
- [8] Jeff Wu. Efficient sequential designs with binary data[J]. *Journal of America Statistical Association*, 1985 (8): 974-984.
- [9] Chao M T, Fuh C D. Bootstrap method for the up and down test

- on pyrotechnology sensitivity analysis[J]. *Statistica Sinica*, 2001 (11): 1-21.
- [10] Balakrishnan N, Nevzorov V B. A Primer on statistical distributions [M]. Hoboken: John Wiley & Sons, 2003.
- [11] 洪东跑, 马小兵, 赵宇. 利用变环境数据的 Weibull 分布可靠性综合评估[J]. 北京航空航天大学学报, 2012, 38(11): 1485-1491.
- HONG Dong-pao, MA Xiao-bing, ZHAO Yu. Integrated reliability assessment for weibull distribution using varied environment data[J]. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2012, 38(11): 1485-1491
- [12] Bagdonavicius V, Nikulin M. Accelerated life models modeling and statistical analysis [M]. London: Chapman&Hall/CRC, 2002: 120-125.
- [13] Kalbfleisch J D, Prentice R L. The statistical analysis of failure time data[M]. Hoboken: John Wiley & Sons, 2002: 105-108.

Reliability Analysis for Explosive Initiator Based on Generalized Linear Models

HONG Dong-pao¹, WANG Ying-hua¹, GUAN Fei¹, WEN Yu-quan²

(1. China Academy of Launch Vehicle Technology, Beijing 100076, China; 2. State Key Laboratory of Explosion Science and Technology, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

Abstract: In order to improve the reliability analysis of the explosive initiator with small sample size, a method based on generalized linear models of reliability analysis for explosive initiator was proposed according to sensitivity test and characteristics of reliability analysis. The likelihood function was transformed to a generalized linear expression of binomial variable. Using the generalized linear model for binomial distribution, the maximum likelihood estimations of the model coefficients were obtained, and corresponding arithmetic was put forward. With the asymptotic normality of maximum likelihood estimations, the approximated confidence interval for the reliability was obtained by logit transform of reliability function. The present method was validated by the test data of stab detonator and electronic detonator. Results show that using about 150 samples is available to analysis the explosive initiator with a reliability goal of 0.999 by the method in this research.

Key words: aircraft design; explosive initiator; reliability analysis; generalized linear models; sensitivity test

CLC number: TJ55, TB114.3

Document code: A

DOI: 10.11943/j.issn.1006-9941.2015.03.013



《含能材料》高效毁伤弹药专栏征稿

高效毁伤弹药以“利用最小化成本获得最大化效果”为目标,对含能材料的性能和能量提出了更高的要求。为进一步促进高效毁伤弹药及其技术的研究,本刊将于2015年增设高效毁伤弹药专栏,内容涉及(1)传统含能材料的优化和改进以及先进含能材料的开发和应用,包括:传统含能材料合成、制造、处理和应用的新技术与新技术,新的CHON含能材料的开发和应用,金属化炸药,非传统概念炸药(如燃料空气炸药、温压炸药),高能量密度材料;(2)含能材料能量的控制输出研究,包括:能量输出增强(如组合装药),能量输出聚焦/定向,能量输出模式可控(如多模装药),能量输出范围可控(如低附带毁伤炸药)。欢迎广大学者投稿,来稿时请选择对应的专栏。

《含能材料》编辑部