文章编号：1006-9941(2010)01-0058-05

火工品发火点估计方法比较研究

田玉斌，王典鹏，房永飞
（北京理工大学理学院，北京 100081）

摘 要：100p% 发火点估计是火工品可靠性设计、鉴定和评估的重要基础，长期以来发展了升降法、Langlie 法、Wu 方法、Neyer 方法和随机逼近方法等。本研究针对正态和 Logistic 感度分布，应用蒙特卡洛方法，系统全面地比较了这些方法。综合发火点估计的波动性和偏差，给出各个方法的适用范围；$p=0.5$ 时，建议使用优化随机逼近方法；$p=0.99\sim0.999$ 时，建议使用 Neyer 方法。

关键词：可靠性工程；火工品；100p% 发火点；感度分布；序贯试验
中图分类号：TJ55；TJ450.1 **文献标识码**：A **DOI**：10.3969/j.issn.1006-9941.2010.01.015

1 引 言

在研究火工品的发火点时，通常假设：（1）每个火工品都有一个临界刺激量，当试验施加的水平高于被试验火工品的临界刺激量时，该火工品发火，否则不发火；（2）火工品的临界刺激量 X 是连续型随机变量，其分布函数 $F(x)$ 称为感度分布。从 20 世纪 40 年代至 21 世纪，在国内外相关文献中，大多假设感度分布为正态分布、Logistic 分布、或者是它们的变换分布[1,2]。当 $F(x)$ 为变换分布时，可以对试验水平进行相应的变换，将感度分布转化为常见分布。为此，本文主要基于正态分布和 Logistic 分布开展相关研究。

火工品 100p% 发火点定义为感度分布 $F(x)$ 的 100p% 分位数。若记该分位数为 x_p，则它满足：$F(x_p)=P(X\le x_p)=p$，表示施加刺激水平 x_p 时火工品发火的概率为 100p%。在这一意义下，通常也将 x_p 称为火工品的 100p% 理论发火点。

有效估计 x_p 是火工品可靠性设计、鉴定和评估的重要基础。文献[3]指出，当样本量适中或较小时，有效估计 x_p 的方法是序贯试验方法。在序贯试验中，每个样品的试验结果只有两个：发火或不发火；预先确定第 1 次试验的水平，第 i 次试验的水平由前 $(i-1)$ 次试验的结果确定；可以根据已获得的试验结果，优化安排当前试验的水平。半个多世纪以来，以估计 x_p 为目的，发展了一些不同的序贯试验方法，常见的有升降法[4]、Langlie 方法[5]、Wu 方法[1]、Neyer 方法[6]和优化随机逼近方法[7]。迄今为止，无论是在理论还是在应用领域，我国大多只致力于研究 20 世纪 50 ~70 年代发展的升降法和 Langlie 方法，对 20 世纪 80 年代以后发展的新方法研究较少，应用也不多见[8]。

本文在介绍火工品 100p% 发火点估计方法的基础上，应用蒙特卡洛方法，针对正态感度分布和 Logistic感度分布，在 $p=0.5, 0.99, 0.999$ 时，系统全面地比较这些方法，刻画各个方法的估计特点和性质。为进一步优化试验研究奠定必要的基础，也为实际应用提供指导意见。

2 分位数 x_p 的估计方法

正态分布和 Logistic 分布可以表示为 $F(x)=G((x-\mu)/\sigma)$，其中 $G(\cdot)$ 为已知的分布函数，μ 和 σ 为未知参数。此时，$F(x)$ 的 p 分位数为 $x_p=\mu+\sigma G^{-1}(p)$。

为了估计 x_p，需要设计若干刺激水平，观测发火与不发火结果，然后进行统计分析。记序贯试验获得的数据为 $(x_1,y_1)\cdots(x_n,y_n)$，其中 x_i 表示第 i 次试验的刺激水平，y_i 表示相应的试验结果：$y_i=0$，表示不发火；$y_i=1$，表示发火。依据感度分布 $F(x)$ 的定义，有

$$P(y_i=1)=P(X\le x_i)=F(x_i)=G((x_i-\mu)/\sigma),\quad i=1,\cdots,n \tag{1}$$

在对观测数据进行统计分析时，似然函数和 Fisher 信息矩阵是两个重要的数学公式。根据式(1)，似然函数为

$$L(\mu,\sigma)\propto\prod_{i=1}^{n}p_i^{\,y_i}(1-p_i)^{1-y_i} \tag{2}$$

收稿日期：2009-02-23；**修回日期**：2009-07-27
基金项目：国家自然科学基金资助(10971012)
作者简介：田玉斌(1966 -)，女，主要从事火工品可靠性设计与评估方法及可靠性鉴定试验技术等方面的研究。e-mail：tianyb@bit.edu.cn

式中，$p_i = F(x_i) = G((x_i - \mu)/\sigma)$，$\propto$ 表示比例符号，即“$\propto$”两边的式子相差一个比例常数。对似然函数 $L(\mu,\sigma)$ 关于 (μ,σ) 求最大值，最大值点 $(\hat{\mu},\hat{\sigma})$ 即为 (μ,σ) 的最大似然估计。根据文献[9]，当试验结果 $(x_1,y_1)\cdots(x_n,y_n)$ 具有交错区间时（即具有发火结果的最小刺激水平低于具有不发火结果的最大刺激水平），$(\hat{\mu},\hat{\sigma})$ 存在唯一。

Fisher 信息矩阵的表达式为

$$I_n(\mu,\sigma) = E\begin{pmatrix} [\frac{\partial \ln L(\mu,\sigma)}{\partial \mu}]^2 & \frac{\partial \ln L(\mu,\sigma)}{\partial \mu}\frac{\partial \ln L(\mu,\sigma)}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial \ln L(\mu,\sigma)}{\partial \sigma}\frac{\partial \ln L(\mu,\sigma)}{\partial \mu} & [\frac{\partial \ln L(\mu,\sigma)}{\partial \sigma}]^2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

式中，(μ,σ) 固定，关于 $(x_1,y_1)\cdots(x_n,y_n)$ 求数学期望，它是序贯试验获得的关于 (μ,σ) 信息的一种度量。

在估计 x_p 的方法中，升降法和 Langlie 法的原始思想是估计参数 μ，即估计感度分布的 0.5 分位数；Neyer 方法是通过精确估计参数 (μ,σ) 来估计感度分布的所有分位数；Wu 方法和优化随机逼近方法是估计特定分位数 x_p。虽然这些方法的思想很明确，但是在国内理论研究与实际应用领域，特别是实际应用领域，也使用升降法和 Langlie 法估计其他分位数 x_p。

2.1 升降法

1948 年，文献[4]基于正态分布 $N(x|\mu,\sigma^2)$，提出升降法。在该方法中，预先猜测 μ,σ 的值 μ_{guess}，σ_{guess}，令初始试验水平 $x_1 = \mu_{\text{guess}}$，步长 $\Delta = \sigma_{\text{guess}}$，然后如下设计后续试验水平

$x_{i+1} = x_i - 2\Delta(y_i - 0.5)$，$i \geq 1$

直至完成预定的试验量 N。

在获得试验数据 $(x_1,y_1)\cdots(x_n,y_n)$ 后，利用式(2)估计参数 (μ,σ)。然后，通过关系 $x_p = \mu + \sigma G^{-1}(p)$ 估计分位数 x_p。

由于升降法简单、易操作，它被编入美军标 MIL-STD-331B(1989)和国军标 GJB/Z377A(1994)。

2.2 Langlie 法

1962 年，文献[5]基于正态分布 $N(x|\mu,\sigma^2)$，提出 Langlie 方法[5]。在该方法中，先预估参数 μ 和 σ 的值 μ_{guess} 和 σ_{guess}，取 $L = \mu_{\text{guess}} - 4\sigma_{\text{guess}}$，$U = \mu_{\text{guess}} + 4\sigma_{\text{guess}}$。然后，取 $x_1 = (L+U)/2$，获得试验结果 y_1。当 $y_1 = 1$ 时，$x_2 = (L + x_1)/2$；当 $y_1 = 0$ 时，$x_2 = (U + x_1)/2$；记试验结果为 y_2。对于 $n > 2$，从第 n 次试验往回寻找直至第 k 次试验，使得在 $y_k,\cdots,y_n$ 中，发火数与不发火数相等。取第 $(n+1)$ 次试验的水平为 $x_{n+1} = (x_n + x_k)/2$；若找不到这样的 k，当 $y_n = 1$，取 $x_{n+1} = (L + x_n)/2$；当 $y_n = 0$，取 $x_{n+1} = (U + x_n)/2$；观测试验结果 y_{n+1}。

做完 N 次试验后，求参数 (μ,σ) 的最大似然估计，再通过关系 $x_p = \mu + \sigma G^{-1}(p)$ 估计 x_p。与升降法一样，Langlie 法也列入美军标 MIL－STD－331B 和国军标 GJB/Z377A。

2.3 Wu 方法

1985 年，Wu 提出了另一种估计 x_p 的方法[1]，逐步设置试验水平使其逼近 x_p。Wu 方法的条件为：有历史试验数据 $(x_1^*, y_1^*),\cdots,(x_m^*, y_m^*)$，它具有交错现象。此后，Wu 方法如下设计试验水平，并估计 x_p：(1) 在观测到数据 $(x_1,y_1),\cdots,(x_n,y_n)$ $(n \geq 0)$ 后，基于 $(x_1^*, y_1^*),\cdots,(x_m^*, y_m^*)$ 和 $(x_1,y_1),\cdots,(x_n,y_n)$，求出参数 (μ,σ) 的最大似然估计 $(\hat{\mu},\hat{\sigma})$；(2) 取第 $n+1$ 次试验的水平为 $x_{n+1,\text{预选}} = \hat{\mu} + \hat{\sigma}G^{-1}(p)$。为了控制 $x_{n+1,\text{预选}}$，令 d_n 是方程 $x_{n+1,\text{预选}} = x_n - (d_n/n)(y_n - p)$ 的解，取 $x_{n+1} = x_n - (d_n^*/n)(y_n - p)$，$d_n^* = \max[\delta, \min(d_n, d)]$，满足 $d > \delta \geq 0$。Wu 建议 $\delta = 0$，$d = 50$；(3) 重复上述两步直到完成预定样本量 N 的试验，此时 x_p 的最大似然估计为 $\hat{x}_p = x_{N+1}$。

2.4 Neyer 方法

1994 年，Neyer 提出一个优化设计[6]。在设计前，猜测 μ 的范围 $[\mu_{\min},\mu_{\max}]$ 和 σ 的值 σ_{guess}。然后，试验分三部分进行。首先确定试验水平的范围，获得初始试验数据。第二部分试验旨在获得具有交错区间的试验结果，具体步骤为：(i) 基于初始试验的数据 $(x_1,y_1),\cdots,(x_n,y_n)$，计算最小发火水平 Min$X$ 和最大不发火水平 Max0，令 $\hat{\mu}_n = (\text{Min}X + \text{Max}0)/2$，$\hat{\sigma}_n = \sigma_{n,\text{guess}}$。若该步是第二部分试验的第一次试验，令 $\sigma_{n,\text{guess}} = \sigma_{\text{guess}}$。否则，如下更新 $\sigma_{n,\text{guess}}$；(ii) 选择新的试验水平 x_{n+1}，使得在水平 $x_1,\cdots,x_n$，x_{n+1} 处进行试验，Fisher 信息矩阵的行列式 $|I_n(\mu,\sigma)|$ 在 $(\hat{\mu}_n,\hat{\sigma}_n)$ 处达到最大。在 x_{n+1} 处进行试验，记结果为 y_{n+1}。更新对 σ 的猜测，$\sigma_{n+1,\text{guess}} = 0.8 \times \sigma_{n,\text{guess}}$；(iii) 重复(i)—(ii)步骤，直到出现交错区间，停止第二部分的试验。

第三部分试验是逐步改善参数 (μ,σ) 的估计，使其更加有效。该部分的试验步骤为：(1) 基于所做试验结果，计算 (μ,σ) 的最大似然估计 $(\hat{\mu}_n,\hat{\sigma}_n)$，并做恰当调整；(2) 选择新的试验水平 x_{n+1}，使得 Fisher 信息矩阵的行列式 $|I_n(\mu,\sigma)|$ 在调整估计处达到最大。在 x_{n+1} 处进行试验，获得结果 y_{n+1}；(3) 重复(1)～(2)，直到完成样本量 N 的试验。

同样，做完 N 次试验后，求参数 (μ,σ) 的最大似

然估计，再通过关系 $x_p=\mu+\sigma G^{-1}(p)$ 估计 x_p。

2.5 优化随机逼近方法

2004 年，Joseph 提出逐步逼近 x_p 的优化随机逼近方法[7]。首先利用先验信息，猜测 x_p 的取值 $x_{p,\mathrm{guess}}$ 和 σ 的值 σ_{guess}，并给出用 $x_{p,\mathrm{guess}}$ 估计 x_p 的不确定性 τ，假设 $x_p\sim N(x_{p,\mathrm{guess}},\tau^2)$。例如，如果以 95% 的概率认为 x_p 在 $x_{p,\mathrm{guess}}\pm4$ 区间内，取 $\tau=2.0408$。

令第 1 次试验的水平 $x_1=x_{p,\mathrm{guess}}$，观测试验结果 y_1，按如下形式设计试验

$$x_{n+1}=x_n-a_n(y_n-b_n),\ n\geq1 \tag{4}$$

式中，x_n是第 n 次试验的水平，y_n 是试验结果，a_n 和 b_n 是待定的优化常数序列。

Joseph 按照“试验水平在 x_p 附近选取，而且它与 x_p 的差具有最小的不确定性”的原则，给出常数序列 a_n 和 b_n，它们为

$$a_i=\frac{c_i}{\beta b_i(1-b_i)},\quad c_i=\frac{v_i}{(1+v_i)^{1/2}}\phi\left\{\frac{\Phi^{-1}(p)}{(1+v_i)^{1/2}}\right\},$$

$$b_i=\Phi\left\{\frac{\Phi^{-1}(p)}{(1+v_i)^{1/2}}\right\},\quad v_{i+1}=v_i-\frac{c_i^{\,2}}{b_i(1-b_i)},$$

$$v_1=\beta^2\tau^2,\quad \beta^2=\frac{G'(u_p)}{\phi\{\Phi^{-1}(p)\}}\cdot\frac{1}{\sigma_{\mathrm{guess}}} \tag{5}$$

式中，$\phi(\cdot)$表示标准正态密度函数，u_p 为已知分布 $G(\cdot)$ 的 p 分位数。

在进行完 N 次试验后，x_p 的点估计为 x_{N+1}。

3 比较研究

在上述五种方法中，升降法和优化随机逼近方法是通过第 n 次试验的水平和结果来设计第 $n+1$ 次水平，属于非自适应设计。Langlie、Wu 方法和 Neyer 方法都是通过前 n 次试验的水平和结果来设计第 $n+1$ 次水平，属于自适应设计。在这些方法中，升降法和 Langlie 方法将试验水平设计在 $x_{0.5}$ 周围，Neyer 方法将试验水平优化分散在一定的范围内，Wu 方法和优化随机逼近方法将试验水平设计在 x_p 附近。

这些方法在估计感度分布的分位数 x_p 时，估计精度的差别、以及各自适合估计的分位数范围等，都是值得研究的问题，也是未来设计新试验方法的重要基础。以下应用蒙特卡洛方法，模拟研究这些问题。

3.1 模拟条件和方式

重新审视各种方法的初始条件。升降法需要猜测参数(μ,σ)的值，即 μ_{guess}，σ_{guess}，初始试验水平 $x_1=\mu_{\mathrm{guess}}$，步长 $\Delta=\sigma_{\mathrm{guess}}$；Langlie 方法也需要 μ_{guess} 和 σ_{guess}二值，刺激水平的下限为 $L=\mu_{\mathrm{guess}}-4\sigma_{\mathrm{guess}}$，上限 $U=\mu_{\mathrm{guess}}+4\sigma_{\mathrm{guess}}$；Wu 方法需要一组具有交错现象的初始试验数据；Neyer 方法需要猜测参数 μ 的取值范围$[\mu_{\min},\mu_{\max}]$和参数 σ 的值 σ_{guess}；优化随机逼近方法需要猜测初始试验水平 x_1，以及表示这种猜测的不确定性的常数 τ，以及 σ_{guess}。

在以下的模拟比较研究中，我们尽可能采用最少的初始猜测，并公平地比较各种方法。模拟分两步进行。

（1）给定模拟条件。真实的感度分布考虑两种情况，即正态分布和 Logistic 分布，它们的均值都为 10，标准差都为 1（根据文献[10]，当参数真值 $\mu=10a$，$\sigma=a$时，如 $\mu=5$，$\sigma=0.5$，参数估计具有同变性。于是，取 $\mu=10$，$\sigma=1$ 作为参数真值具有一定的代表性）；试验前猜测(μ,σ)的值$(\mu_{\mathrm{guess}},\sigma_{\mathrm{guess}})$；在升降法中，$x_1=\mu_{\mathrm{guess}}$，$\Delta=\sigma_{\mathrm{guess}}$；在 Langlie 方法中，$L=\mu_{\mathrm{guess}}-4\sigma_{\mathrm{guess}}$，上限 $U=\mu_{\mathrm{guess}}+4\sigma_{\mathrm{guess}}$；在 Neyer 方法中，以 μ_{guess} 为中心取范围 $[\mu_{\min},\mu_{\max}]=[\mu_{\mathrm{guess}}-4\sigma_{\mathrm{guess}},\mu_{\mathrm{guess}}+4\sigma_{\mathrm{guess}}]$；在 Wu 方法中，应用 Neyer 方法的第一和第二两部分试验得到初始试验数据；在优化随机逼近方法中，由 μ_{guess} 和 σ_{guess}，取 $x_1=\mu_{\mathrm{guess}}+\sigma_{\mathrm{guess}}G^{-1}(p)$，给定常数 $\tau_1^{\,2}=2.0408^2$；各种试验方法的样本量都为 N。

（2）重复试验。在相同的条件下，分别将各个方法重复 1000 次，得到 1000 个 x_p 的估计，计算它们的均值和 MSE 的平方根。

3.2 模拟结果

在模拟中，样本量 N 取为 50，(μ,σ)的猜测$(\mu_{\mathrm{guess}},\sigma_{\mathrm{guess}})$分别取 9 种情况，即：$\mu_{\mathrm{guess}}=9$，$\sigma_{\mathrm{guess}}=0.5$；$\mu_{\mathrm{guess}}=9$，$\sigma_{\mathrm{guess}}=1$；$\mu_{\mathrm{guess}}=9$，$\sigma_{\mathrm{guess}}=2$；$\mu_{\mathrm{guess}}=10$，$\sigma_{\mathrm{guess}}=0.5$；$\mu_{\mathrm{guess}}=10$，$\sigma_{\mathrm{guess}}=1$；$\mu_{\mathrm{guess}}=10$，$\sigma_{\mathrm{guess}}=2$；$\mu_{\mathrm{guess}}=11$，$\sigma_{\mathrm{guess}}=0.5$；$\mu_{\mathrm{guess}}=11$，$\sigma_{\mathrm{guess}}=1$；$\mu_{\mathrm{guess}}=11$，$\sigma_{\mathrm{guess}}=2$。在上述猜测中，$\mu$ 的变化不太大，其主要原因是在实际应用中通常能够较准确地猜测 μ 的值。

由于篇幅所限，本文只展示出三种初始猜测 $\mu_{\mathrm{guess}}=10$，$\sigma_{\mathrm{guess}}=0.5$；$\mu_{\mathrm{guess}}=10$，$\sigma_{\mathrm{guess}}=1$；$\mu_{\mathrm{guess}}=10$，$\sigma_{\mathrm{guess}}=2$ 所对应的估计效果。针对 $p=0.5,0.99,0.999$，表 1 给出真实感度分布为正态分布时，应用五种方法估计 x_p 的$(\mathrm{MSE})^{1/2}$；表 2 给出 $p=0.5,0.99,0.999$对应的 x_p 估计的偏差；针对同样的三种初始猜测，在真实感度分布为 Logistic 分布时，表 3 及表 4 给出 x_p 估计的$(\mathrm{MSE})^{1/2}$和偏差。

从表 1 ~ 表 3，综合 x_p 估计的波动性（用$(\mathrm{MSE})^{1/2}$取值的大小刻画）和偏差来看：（1）在σ_{guess}较小时，用

表 1 真实感度分布为正态分布时,五种方法估计 x_p 的$(\mathrm{MSE})^{1/2}$

Table 1 $(\mathrm{MSE})^{1/2}$ of x_p estimation obtained from five methods under the true normal sensitivity distribution

method	$\mu_{guess}=10,\sigma_{guess}=0.5$			$\mu_{guess}=10,\sigma_{guess}=1$			$\mu_{guess}=10,\sigma_{guess}=2$		
	$p=0.5$	$p=0.99$	$p=0.999$	$p=0.5$	$p=0.99$	$p=0.999$	$p=0.5$	$p=0.99$	$p=0.999$
Up and Down	0.1903	0.7890	1.0374	0.2069	0.6408	0.8318	0.2640	0.5809	0.7384
Langlie	0.1866	0.8175	1.0768	0.1951	0.7443	0.9730	0.2168	0.7069	0.9218
WU	0.2174	1.2968	1.4904	0.2105	1.2874	1.9176	0.2084	1.5125	2.3568
Neyer	0.2149	0.6249	0.8065	0.2234	0.5738	0.7371	0.2488	0.5900	0.7542
optimal stochastic approximation	0.2019	0.4478	0.7542	0.1785	0.4496	0.5829	0.2097	0.4457	2.0033

表 2 真实感度分布为正态分布时,五种方法估计 x_p 所得偏差

Table 2 Deviation of x_p estimation obtained from five methods under the true normal sensitivity distribution

method	$\mu_{guess}=10,\sigma_{guess}=0.5$			$\mu_{guess}=10,\sigma_{guess}=1$			$\mu_{guess}=10,\sigma_{guess}=2$		
	$p=0.5$	$p=0.99$	$p=0.999$	$p=0.5$	$p=0.99$	$p=0.999$	$p=0.5$	$p=0.99$	$p=0.999$
Up and Down	−0.0014	−0.2647	−0.3511	−0.0078	−0.1299	−0.1699	−0.0157	0.3614	0.4852
Langlie	−0.0014	−0.3285	−0.4358	−0.0026	−0.2844	−0.3768	0.0065	−0.2204	−0.2948
WU	−0.0029	0.2877	0.3796	−0.0035	0.3774	0.6437	−0.0062	0.3895	0.6847
Neyer	−0.0055	−0.1326	−0.1743	−0.0003	−0.1189	−0.1578	−0.0083	−0.0913	−0.1185
optimal stochastic approximation	−0.0010	−0.3054	−0.6101	0.0023	−0.0597	−0.0141	−0.0026	0.2977	2.0034

表 3 真实感度分布为 Logistic 分布时,五种方法估计 x_p 的$(\mathrm{MSE})^{1/2}$

Table 3 $(\mathrm{MSE})^{1/2}$ of x_p estimation obtained from five methods under the true logistic sensitivity distribution

method	$\mu_{guess}=10,\sigma_{guess}=0.2757$			$\mu_{guess}=10,\sigma_{guess}=0.5513$			$\mu_{guess}=10,\sigma_{guess}=1.1027$		
	$p=0.5$	$p=0.99$	$p=0.999$	$p=0.5$	$p=0.99$	$p=0.999$	$p=0.5$	$p=0.99$	$p=0.999$
Up and Down	0.1750	0.8850	1.3155	0.1955	0.7371	1.0850	0.2494	0.7241	1.0556
Langlie	0.1753	0.9046	1.3488	0.1779	0.8315	1.2337	0.2041	0.8244	1.2174
Wu	0.1916	1.8193	2.7149	0.1911	2.4092	3.7128	0.1886	3.1742	4.0106
Neyer	0.1940	0.7477	1.1095	0.1948	0.7663	1.1328	0.2015	0.7598	1.1200
optimal stochastic approximation	0.1877	0.5460	1.0152	0.1588	0.5714	1.0141	0.1851	1.1230	3.4951

表 4 真实感度分布为 Logistic 分布时,五种方法估计 x_p 所得偏差

Table 4 Deviation of x_p estimation obtained from five methods under the true logistic sensitivity distribution

method	$\mu_{guess}=10,\sigma_{guess}=0.2757$			$\mu_{guess}=10,\sigma_{guess}=0.5513$			$\mu_{guess}=10,\sigma_{guess}=1.1027$		
	$p=0.5$	$p=0.99$	$p=0.999$	$p=0.5$	$p=0.99$	$p=0.999$	$p=0.5$	$p=0.99$	$p=0.999$
Up and Down	0.0002	−0.2309	−0.3471	−0.0052	−0.1225	−0.1816	−0.0095	0.4919	0.7441
Langlie	−0.0007	−0.3278	−0.4923	−0.0012	−0.2827	−0.4244	0.0058	−0.1938	−0.2943
WU	−0.0012	0.7516	0.8660	0.0011	0.7202	0.7169	−0.0017	0.7467	0.7635
Neyer	−0.0007	−0.2124	−0.3189	−0.0042	−0.2490	−0.3722	0.0106	−0.2097	−0.3160
optimal stochastic approximation	0.0002	−0.3466	−0.7730	0.0029	−0.0360	−0.5496	−0.0011	1.0977	3.4951

升降法和 Langlie 方法估计感度分布的 0.5 分位数效果较好。但与其它方法所得估计的效果差别不大;(2) 但是,在 σ_{guess}适中和较大情形,优化随机逼近方法较好地估计 $x_{0.5}$;(3) 当对 μ 和 σ 的猜测较准确时,优化随机逼近方法估计 $x_{0.99}$和 $x_{0.999}$的效果是最好的;(4) 无论对 μ 和 σ 的猜测如何,Neyer 方法的表现最平稳,在 $p=0.99$ 和 $p=0.999$ 时,Neyer 方法所得估计的效果始终较好,$(\mathrm{MSE})^{1/2}$和偏差都比较小。

对于(μ,σ)的其他六种初始猜测$(\mu_{guess}, \sigma_{guess})$,在 Logistic 分布情形,有如下模拟结果:(i) 当 $\sigma_{guess}=0.2757$ 时,升降法、Langlie 方法和优化随机逼近方法所得 $x_{0.5}$估计的$(\mathrm{MSE})^{1/2}$较小,它们之间的差别在

$10^{-2} \sim 10^{-3}$量级之间，偏差的差别为 10^{-3} 量级，其他方法次之；（ii）在 σ_{guess}适中和较大情形，优化随机逼近方法估计 $x_{0.5}$的（MSE）$^{1/2}$一致最小，偏差与其他方法所得最小偏差的差别为 10^{-3} 量级；（iii）无论对 μ 和 σ的猜测如何，Neyer 方法的表现最平稳，在 $p=0.99$时，Neyer 方法所得估计的（MSE）$^{1/2}$ 平稳地在 0.73 附近摆动，偏差与其他方法所得最小偏差相差 10^{-1}量级；在 $p=0.999$ 时，Neyer 方法所得估计的（MSE）$^{1/2}$平稳地在 1.10 附近摆动，偏差平稳地在 0.30 处，不像其他方法变化较剧烈，好的在 0.30 ~ 0.57之间摆动，差的在0.01 ~1.20，或者 0.35 ~4.49 之间摆动。

在正态分布情形，对于(μ,σ)的其他六种初始猜测(μ_{guess}，σ_{guess})，有如下模拟结果：（I）在 $\sigma_{guess}=0.5$ 时，升降法、Langlie 方法和化随机逼近方法所得 $x_{0.5}$ 估计的（MSE）$^{1/2}$ 相差 10^{-2} 量级，偏差相差 10^{-3} 量级，其他方法次之；（II）在 σ_{guess}适中和较大情形，优化随机逼近方法估计 $x_{0.5}$的（MSE）$^{1/2}$ 基本最小，偏差与其他方法所得最小偏差相差 10^{-3} 量级；（III）无论对 μ 和 σ 的猜测如何，Neyer 方法的表现依然最平稳，在 $p=0.99$ 时，Neyer 方法所得估计的（MSE）$^{1/2}$ 平稳地在 0.65 附近摆动，偏差要么最好，要么与其他方法所得最小偏差相差 10^{-2} 量级；在 $p=0.999$ 时，Neyer 方法所得估计的（MSE）$^{1/2}$ 平稳地在 0.80 附近摆动，偏差稳定在 0.25 处，而其他方法变化较剧烈，好的在 0.02 ~0.48，0.29 ~0.50 之间摆动，差的在 0.01 ~3.00 之间摆动。

4 结 论

根据上述比较，当感度分布为正态分布和 Logistic 分布时，对于火工品 100p% 发火点估计，可得如下结论：

（1）当需要估计感度分布的 0.5 分位数时，可以选用优化随机逼近方法，它操作简单，只需要通过上一次试验的水平和结果就可以确定当前试验的水平，不需要求解参数的极大似然估计，且无论初始猜测如何效果都较好。

（2）在估计 $p=0.99$ 或 $p=0.999$ 分位数时，最好选用 Neyer 方法，它的估计效果对初始猜测非常稳健，而且（MSE）$^{1/2}$ 和偏差或者最好，或者与其它方法所得最好结果相差较小。

参考文献：

[1] Wu C F J. Emcient sequential designs with binary data[J]. *J Amer Statist Assoc*，1985，80：974 －84.

[2] Chao M T，Fuh C D. Bootstrap method for the up and down test on pyrotechnology sensitivity analysis[J]. *Statistica Sinica*，2001，11：1 －21.

[3] Joseph V R，Tian Yubin，Wu C F J. Adaptive design for stochastic rooting-finding[J]. *Statistics Sinica*，2007，17：1549 －1565.

[4] Dixon W J，Mood A M. A method for obtaining and analyzing sensitivity data[J]. *Journal of the Americal Statistical Association*，1948，43：109 －126.

[5] Lagglie H J. A reliability test method for one-shot item[R]. Technical Report U-1792，1962.

[6] Neyer B T. A D-optimality-based sensitivity test[J]. *Technometrics*，1994，36：61 －70.

[7] Joseph V R. Efficient Robbins-Monro procedure for binary data [J]. *Biometrika*，2004，91：461 －470.

[8] 周利东，温玉全，汪佩兰，等. Neyer D-最优化法感度试验的计算机模拟[J]. 含能材料，2009，17(2)：152 －156.
ZHOU Li-dong，WEN Yu-quan，WANG Pen-lan，et al. Simulation of Neyer D-optimal senstivity test[J]. *Chinese Journal of Energetic Materials*(*Hanneng Cailiao*)，2009，17(2)：152 －156.

[9] Silvapulle M J. On the existence of maximum likelihood estimators for the binomial response model[J]. *Journal of the Royal Statistical Society*，Ser. B，1981，43：310 －313.

[10] 田玉斌，李国英，房永飞. 火工品可靠性试验数据的综合分析方法[J]. 系统科学与数学，2006(2)：21 －32.
TIAN Yu-bin，LI Guo-ying，FANG Yong-fei. The synthetically analytical method for data sets on pyrotechnics rellability test [J]. *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences*，2006(2)：21 －32.

Comparative Study on Estimating Method of Firing Level of Pyrotechnics

TIAN Yu-bin，WANG Dian-peng，FANG Yong-fei

(*School of Science*，*Beijing Institute of Technology*，*Beijing* 100081，*China*)

Abstract：Estimation of 100p% firing level is very important in reliability design，qualification and evaluation for pyrotechnics. A number of methods which include the up and down method，the Langlie method，the Wu method，the Neyer method and the optimal stochastic approximation method have been developed for a long time. These methods were compared under the normal and logistic sensitivity distribution by using Monte Carlo technique. The appropriate application range for each method was given by considering deviations. The optimal stochastic approximation method is suggested for $p=0.5$ and the Neyer method is suggested for $p=0.99-0.999$.

Key words：reliability engineering；pyrotechnics；100p% firing level；sensitivity distribution；sequential design

CLC number：TJ55；TJ450.1 **Document code**：A **DOI**：10.3969/j.issn.1006-9941.2010.01.015