常用数理统计方法

中国科学院数学研究所统计组编

科学出版社

统一书号：13031·114
定　　价：0.83 元

本社书号：228·13-1

第三章 正交设计

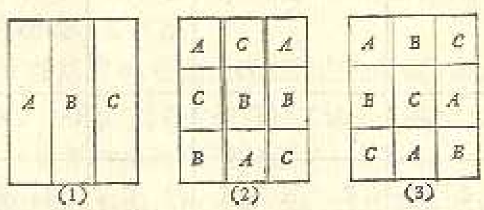
§1 试验为什么要设计

在生产斗争和科学实验中，经常要做许多试验．试验设计得好，试验次数不多，就能得到满意的结果；设计不好，次数既多，结果还不一定满意．试验次数多得不合理，必然浪费大量的人力物力，有时由于时间拖长，试验条件改变，也会使试验失败．因此，如何合理地设计试验是很值得研究的一个问题．

我们先看一个简单的例子．

例 3.1　某地想移植外地的优良小麦品种，选了 A、B、C 三种品种进行试验，看那一种品种在本地更合适一些．

一种试验的方法是把三种品种种在附图 (1) 的三块田里．如果试验的结果是品种 A 产量最高，B 其次，C 最少，我们能否下结论说品种 A 在本地最适合呢？我们仔细观察一下就会发现，三种品



三种试验方法

种尽管种在相邻的三块地上，但三块地的土质不会完全一样，如果正好种 A 的这块田土质等条件最好，种 B 的那块田稍次，种 C 的那块田最差，那么 A 的产量高并不一定说明 A 最适合本地生产．这时品种的好坏与土壤的情况混杂在一起，给如何下结论带来了困难．因此，附图(1)的这种设计是不好的．如何改善这种设计呢？可

以采用的方法很多，一种是随机化的方法，把原来的三大块田每块各分成三小块，在每大块上三种品种都种，三种品种分别种在那一块，由抽签的方法决定(或查一种随机数表来定)．如附图(2)所示．这种方法比(1)要好，它使土质等因素对试验的影响大大减弱了，得到的结论就比较可靠．但是这种方法还有不足之处，即土地从纵的方向来看是安排得比较好的，纵的每一大块上三种品种都有；但如果从横的方向把土地分成三大块来看，安排得就不那么好了．在最上面的一大块有两块品种 A，没有品种 B，而在中间一大块上，种了二块 B，没种 A．如果土壤按横的三大块划分土质相差较大，则给结果又带来了干扰．于是还有一种拉丁方的方法，种植的情况如附图 (3)．我们无论从纵的方向还是从横的方向来看，每大块三种品种都有，这样，品种的情况就不会和土壤等因素的作用混起来．从这样一个很简单的例子我们就会明白试验为什么要设计．

在试验中经常遇到的另一个问题是多因素问题，我们还是先看一个简单的例子．

例 3.2　某化工厂想提高某化工产品的质量和产量，对工艺中三个主要因素各分三个等级进行试验，在统计上等级称做水平，因素和水平如下：

水平＼因素	A：温度	B：压力	C：加碱量
1	80℃	5 公斤	2.0 公斤
2	100℃	6 公斤	2.5 公斤
3	120℃	7 公斤	3.0 公斤

为了书写的简便，A 的三个水平用 A_1，A_2，A_3 表示，因素 B，C 的表示法也一样．

对于这样一个试验，许多同志采用下面的方法：首先固定 A 和 B，变化 C：

$$A_1B_1 \begin{cases} C_1 \\ \boxed{C_2} \\ C_3 \end{cases}$$ （好的用 □ 表示）.

试验结果发现 C_2 最好．然后固定 A 为 A_1，C 为 C_2，变化 B：

$$A_1C_2 \begin{cases} B_1 \\ B_2 \\ \boxed{B_3} \end{cases}$$

结果是 B_3 好．再后固定 B 为 B_3，C 为 C_2，变化 A：

$$B_3C_2 \begin{cases} A_1 \\ \boxed{A_2} \\ A_3 \end{cases}$$

结果是 A_2 好．于是下结论说 $A_2B_3C_2$ 最好．这种方法叫做简单比较，一般也能得到一定的效果．但是这种方法有缺点，当因素间相互影响比较大时，$A_2B_3C_2$ 就不一定是最好的．用这种方法做试验，同样的试验次数，提供的信息不够丰富．另外，用这种方法做试验，如不做重复试验，给不出误差的估计．如何保持简单比较法的优点（试验次数较少）克服它的缺点呢？试验设计提供了许多方法．特别需要指出的是，多因素试验中，在有些情况下，要将因素的水平组合的全部试验都做是不可能的．附录 I 列举的缩醛化试验，全部作要 7203 次，需要五年．实际是办不到的．附录 I 列举的 CMC 化学浆料的试验，全部作要 15625 次，也是不可能的．因此，在因素较多时，既要考虑试验次数少，又要得出全面的结论，这就需要用科学的方法进行合理的安排．

随着每个试验都有试验误差．在试验误差比较小的场合，处理问题比较方便．当试验误差比较大时，给试验带来很大干扰，甚至因此而得不出正确的结论．在试验操作时，应当充分重视减少试验误差干扰的可能性，尽量保持试验条件的稳定性．测量时力求精确，对一些误差太大的测量方法加以改进．但不管如何努力，

试验误差不可能消灭，因此在试验设计时事先要考虑试验误差的影响，尽量提高试验的精度，排除误差的干扰．

试验设计是数理统计的一门重要分支，它的主要内容是讨论如何合理的安排试验以及试验后的数据如何分析等．本书仅仅介绍在实际中应用最广的正交设计法．有关这方面的内容可参考[5]，[6]，[7]和[17]．

§2 正交拉丁方

先看一个例子．

例 3.3　生产某染料，用四种主要原料 A——硫磺，B——硫化碱，C——烧碱，D——二硝基，每种原料均取三个水平，要找一个较好的配方，使质量又好，成本又低．

如果每个因素各个水平的所有组合都做试验，要做 $3^4=81$ 次，试验次数太多，能否作一部分试验，又能得出较好的结果呢？

我们先考虑 A，B 两个因素，全部试验要作九次，安排如下：

A \ B	B_1	B_2	B_3
A_1	A_1B_1	A_1B_2	A_1B_3
A_2	A_2B_1	A_2B_2	A_2B_3
A_3	A_3B_1	A_3B_2	A_3B_3

如果同时还要考虑因素 C，而试验次数不增加，怎么安排呢？我们看到只有二个因素时，二因素的三个水平互相各碰一次，这样反映的情况比较全面．当三个因素时，要反映的情况比较全面，必须任二个因素间的不同水平各碰一次．回忆上节的第一个例子，采用如下的安排：

A \ C \ B	B_1	B_2	B_3
A_1	$A_1B_1C_1$	$A_1B_2C_2$	$A_1B_3C_3$
A_2	$A_2B_1C_2$	$A_2B_2C_3$	$A_2B_3C_1$
A_3	$A_3B_1C_3$	$A_3B_2C_1$	$A_3B_3C_2$

这样的安排很均衡，A的每个水平和B的三个水平各碰一次，和C的三个水平也各碰一次；同样B的每个水平和A，C的三个水平也是正好各碰一次；对C也有同样的性质．可以设想，虽然只做了九个试验（全部要做$3^3=27$次），还是可以反映比较全面的情况的。为了书写的简便，上面的试验设计表可以简化为

A \ B（C）	1	2	3
1	1	2	3
2	2	3	1
3	3	1	2

上表右下角是

1	2	3
2	3	1
3	1	2

我们发现，在每一行、每一列中，1,2,3 正好各出现一次．具有这样性质的方块叫拉丁方．由于排这种方块常用拉丁字母，所以就产生了拉丁方的名称．

回到我们的例子，若还要考察因素D，能否还保持上述的要求，而试验次数不增加呢？根据方才的经验，D的三个水平必须构成拉丁方，这样和A，B才能均衡．我们用**1 2 3**表示D的三个水平，试验安排如下：

A \ B（C D）	1	2	3
1	1 **1**	2 **2**	3 **3**
2	2 **2**	3 **3**	1 **1**
3	3 **3**	1 **1**	2 **2**

我们看到A，B和C之间很均衡，A，B和D之间也很均衡．但C和D之间就不均衡了．C的1水平只和D的**1**相碰，和**2**，**3**一次

也没碰上，C的其它水平也有类似的情形．这样的安排是不好的，如果试验的结果发现C的1水平最好，同时自然也可认为是D的**1**水平最好，C和D的作用混杂在一起了．因此，需要改进设计．D的三个水平要排成拉丁方这一点是不能变的，问题是D的拉丁方和C的不能一样，两个拉丁方之间要搭配均匀，按此原则改成如下的设计：

A \ B（C D）	1	2	3
1	1 **1**	2 **2**	3 **3**
2	2 **3**	3 **1**	1 **2**
3	3 **2**	1 **3**	2 **1**

D的三个水平组成的是拉丁方，它和A，B之间的搭配是均匀的，D和C之间的搭配也是均匀的．D的每一个水平和C的1，2，3各碰一次，同样C的每一水平和D的**1**、**2**、**3**也各碰一次，达到设计的要求．这样设计就比较好．

我们将C和D的两个拉丁方叠在一起：

$$\begin{array}{|ccc|}\hline 1&2&3\\ 2&3&1\\ 3&1&2\\\hline\end{array} \Rightarrow \begin{array}{|ccc|}\hline 1\mathbf{1}&2\mathbf{2}&3\mathbf{3}\\ 2\mathbf{3}&3\mathbf{1}&1\mathbf{2}\\ 3\mathbf{2}&1\mathbf{3}&2\mathbf{1}\\\hline\end{array} \Leftarrow \begin{array}{|ccc|}\hline \mathbf{1}&\mathbf{2}&\mathbf{3}\\ \mathbf{3}&\mathbf{1}&\mathbf{2}\\ \mathbf{2}&\mathbf{3}&\mathbf{1}\\\hline\end{array}$$

发现1，2，3与**1**，**2**，**3**各碰一次，既无重复又无遗漏．具有这种性质的两个拉丁方叫正交拉丁方．例如下面三个拉丁方就是两两正交的：

$$\begin{array}{|cccc|}\hline 1&2&3&4\\ 2&1&4&3\\ 3&4&1&2\\ 4&3&2&1\\\hline\end{array} \quad \begin{array}{|cccc|}\hline 1&2&3&4\\ 3&4&1&2\\ 4&3&2&1\\ 2&1&4&3\\\hline\end{array} \quad \begin{array}{|cccc|}\hline 1&2&3&4\\ 4&3&2&1\\ 2&1&4&3\\ 3&4&1&2\\\hline\end{array}$$

本书附录II附了一部分正交拉丁方，以便利使用．

正交拉丁方设计由于互相搭配均匀，在分析数据时可以把每个因素的作用分得清清楚楚，不会混杂，并且可以方便地找到最优

工艺条件．正交拉丁方设计可以大大减少试验次数，例 3.3 的试验全部要作 $3^4=81$ 次，而我们只作了九次．对于因素更多、水平更多的情况，节省的数量就更为惊人．例如 8 因素，每因素 7 水平，全部试验要 $7^8=5764801$ 次，用正交拉丁方只需 49 次．因此当因素较多时，用正交拉丁方来安排试验是比较好的，它既能减少试验次数，又能达到因素间的均衡，同时提供分析试验的信息比较丰富，还能给出试验误差的估计．

§3 正 交 表

用正交拉丁方安排试验，通常是排成表格的形式．如例3.3的设计，我们给它编上试验号码，用①，②，…，⑨表示，填在原来的设计里：

A \ B (C D)	1	2	3
1	1 1 ①	2 2 ②	3 3 ③
2	2 3 ④	3 1 ⑤	1 2 ⑥
3	3 2 ⑦	1 3 ⑧	2 1 ⑨

把它立成表格，就成为

试验号 \ 因素	A	B	C	D
1	1	1	1	1
2	1	2	2	2
3	1	3	3	3
4	2	1	2	3
5	2	2	3	1
6	2	3	1	2
7	3	1	3	2
8	3	2	1	3
9	3	3	2	1

这个表 A，B，C，D 任二列之间，三个水平 1，2，3 之间正好各碰

一次，搭配很均匀．具有这种性质的表叫正交表，附录 II 列了常用的正交表．

正交表是不是都从正交拉丁方来的呢？不是的．正交拉丁方必须要试验次数等于正整数的平方（注意并不是每个正整数都有正交拉丁方，如 6×6 的正交拉丁方就不存在），而正交表并不一定，只要任两列之间具有搭配均匀的性质即可．所以正交表是正交拉丁方的自然推广，以后只介绍正交表的用法就够了．

为了叙述的方便，给正交表一个记号，$L_8(2^7)$，$L_{16}(2^{15})$，$L_9(3^4)$，$L_{27}(3^{13})$，$L_{16}(4^5)$ 等等．符号 L 代表正交表；L 下面的数字 8，16，9，27 等表示试验次数；括弧内指数的数字 7，15，4，13，5 等表示最多允许安排因素的个数；括弧内下面的数 2，3，4 等表示因素的水平数．如 $L_{27}(3^{13})$ 表示作 27 个试验，每个因素取 3 个水平，最多允许安排 13 个因素，$L_{16}(4^2\times2^9)$ 表示作 16 个试验，其中最多允许安排二个四水平的因素，九个二水平的因素．

在介绍如何使用正交表之前，先介绍一个重要的概念，叫做交互作用．有实践经验的同志都知道，在一个试验里，不仅各个因素在起作用，而且因素间有时联合起来起作用，这个作用就叫交互作用．举一个通俗的例子．

例 3.4　生产队对四块大豆试验田，用不同方式施肥，结果如下：

第一块没加化肥，平均亩产 400 斤；第二块加 6 斤氮肥，平均亩产 430 斤；第三块加 4 斤磷肥，平均亩产 450 斤；第四块加 6 斤氮肥，4 斤磷肥，平均亩产 560 斤．列成表如下：

N氮肥 \ P磷肥	$P_1=0$	$P_2=4$
$N_1=0$	400 斤	450 斤
$N_2=6$	430 斤	560 斤

从表中看出，只加 4 斤磷肥的效果，使亩产增加 50 斤；只加 6 斤氮肥的效果，使亩产增加 30 斤；氮磷肥都加的效果，使亩产增加 560

斤－400斤＝160斤．因此，

氮磷肥的交互作用效果＝氮磷肥都加的总效果－只加氮肥的效果－只加磷肥的效果＝160斤－30斤－50斤＝80斤．

用第一节讲的简单比较的办法，一般无法判断交互作用的大小，而正交表有时可以考虑交互作用，并给出大小的估计，这是正交表的优点之一．

现在介绍如何使用正交表：

（1）根据试验的目的，确定试验要考察的因素．如果对事物的变化规律了解不多，因素可以多取一些；如果对其规律已有相当了解，可以准确的判断主要因素，这时因素可取少一些．

（2）确定每个因素变化的水平．每个因素的水平数可以相等，也可以不等．重要的因素，或者特别希望详细了解的因素水平可多一些，其余可少一些．

（3）估计试验条件的情况，看看一次能作多少试验，一次作不完，需要分成几次．

（4）综合上述三点选取L表．

我们通过几个例子来说明怎么选用L表．

例 3.5　考察影响某化工产品产量的四个主要因素，每个因素选二个水平：

水平＼因素	A（酸的浓度）	B（反应时间）	C（酸的当量）	D（反应温度）
1	93%	30 分	45	70℃
2	87%	15 分	35	60℃

（1）只考虑 A，B，C 三个因素．

选 $L_8(2^7)$ 比较合适，按附录 II 的表头设计：

列　号	1	2	3	4	5	6	7
因　素	A	B	$A\times B$	C	$A\times C$	$B\times C$	

此时三个因素的两两交互作用完全可以计算出来．共作八个试验，安排试验时，不需要交互作用列，试验安排列成下表：

试验号＼因素	A	B	C
1	1	1	1
2	1	1	2
3	1	2	1
4	1	2	2
5	2	1	1
6	2	1	2
7	2	2	1
8	2	2	2

（2）如果四个因素都要考虑，而它们的交互作用从经验上知道不大，此时仍选 $L_8(2^7)$．由附录 II 表头设计得

列　号	1	2	3	4	5	6	7
因　素	A	B	$A\times B$ $C\times D$	C	$A\times C$ $B\times D$	$B\times C$ $A\times D$	D

这时保证了每个因素的作用可以分析得清楚，而交互作用由于很小，不需要单独拿出来，而让它们混杂在一起．

（3）如果四个因素都考虑，并且特别希望分析 A 与 B，C，D 的交互作用，而其它的交互作用很小，此时仍选 $L_8(2^7)$，表头设计如下（见附录 II）：

列　号	1	2	3	4	5	6	7
因　素	A	B $C\times D$	$A\times B$	C $B\times D$	$A\times C$	D $B\times C$	$A\times D$

在此设计中有一些混杂，B 和 $C\times D$ 混，C 和 $B\times D$ 混，D 和 $B\times C$ 混．但由于 $C\times D$，$B\times D$，$B\times C$ 已知很小，故不影响结果的分析．

附录 II 列出了部分表头设计，使读者用起来格外方便．为了

使读者灵活运用正交表，我们还列出了二列间的交互作用表．如我们要了解 $L_8(2^7)$ 两列间的交互作用，对方才这个情况，我们把 A, B, C, D 分别放在 1, 2, 4, 6 四列．我们若想知道它们的交互作用在那一列，由交互作用表可以方便地查出来．因为 A 放在第一列，查表中(1)的这一行，B 放在第 2 列，查 2 这一列，对应数为 3，即 $A\times B$ 在第 3 列．同样欲查 $C\times D$ 在那一列，就查 (4) 行和 6 列对应的数，此数为 2，即 $C\times D$ 在第二列．表头设计就是通过二列间的交互作用表查出来的．读者可以不拘泥于我们已给的表头设计，利用交互作用表自行设计．附录 II 没有给表头设计与交互作用表的 L 表，表示用这些表一般难以考虑交互作用[1]，只能考虑因素本身的作用．

(4) 如果四个因素都考虑，因素的所有两两交互作用也要考虑．这时由 $L_8(2^7)$ 的表头设计中看出，选 $L_8(2^7)$ 是不可能办到的，于是选 $L_{16}(2^{15})$，由附录 II，它的表头设计如下：

列号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
因素	A	B	$A\times B$	C	$A\times C$	$B\times C$		D	$A\times D$	$B\times D$		$C\times D$			

例 3.6　为了提高造纸的质量，考虑如下四个因素：纸浆浓度 (A)，纸浆材料 (B)，打浆程序 (C)，温度 (D)．每个因素都取三个水平．

(1) 如果只考虑因素 A, B, C，不考虑交互作用，此时选 $L_9(3^4)$，A, B, C 可放在 $L_9(3^4)$ 表中四列的任意三列，如可放在前三列：

列　号	1	2	3	4
因　素	A	B	C	

(2) 如果四个因素都考虑，而不考虑交互作用，这时要根据具

1) 我们说的交互作用，严格来讲是一阶交互作用，还有 $A^2\times B$, $B^2\times C^2$, $A\times B\times C$ 等高阶交互作用，一般的正交设计只考虑到一阶交互作用．

体情况来定．

(i) 试验费用昂贵，希望少作点试验，可仍取 $L_9(3^4)$，表头设计为

列　号	1	2	3	4
因　素	A	B	C	D

这样设计分析的精度差，如条件允许，最好不选这个表，而选试验次数更多的表．

(ii) 试验费用不太大，试验比较方便．此时选 $L_{18}(2\times 3^7)$ 为宜，表头设计如下（A, B, C, D 放在 2—8 列中任四列均可）：

列　号	1	2	3	4	5	6	7	8
因　素		A	B	C	D			

这样分析的精度比 $L_9(3^4)$ 有所提高．

(3) 如需要考察的有因素 A, B, C 及它们两两的所有交互作用．这时 $L_9(3^4)$，$L_{18}(2\times 3^7)$ 均不可能做到，选用 $L_{27}(3^{13})$，表头设计如下（见附录 II）：

列号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
因素	A	B	$(A\times B)_1$	$(A\times B)_2$	C	$(A\times C)_1$	$(A\times C)_2$	$(B\times C)_1$			$(B\times C)_2$		

其中每个交互作用都占了两列．

例 3.7　研究某一橡胶配方，选了四个因素，每个因素选四个水平：

水平 \ 因素	促进剂总量 (A)	氧化锌总量 (B)	促进剂 D 占的比例 (D)	促进剂 M 占的比例 (M)
1	2.9	1	25%	34.7%
2	3.1	3	30%	39.7%
3	3.3	5	35%	44.7%
4	3.5	7	40%	49.7%

(1) 四个因素全部考虑四水平，选用 $L_{16}(4^5)$，四个因素放在表的任四列，表头设计为

列 号	1	2	3	4	5
因 素	A	B	D	M	

这时不可能考虑交互作用.

(2) A，B，M 取四水平，D 取二水平. 选 $L_{16}(4^3\times 2^6)$，A，B，M 放在前三列，D 放在 4—9 列中任一列:

列 号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
因 素	A	B	M			D			

由以上三例，我们看出，选择L表时有如下两条原则:

(A) 先看水平数. 如全是二水平的，就取二水平的L表，L_8，L_{16}，L_{12}，L_{20}，L_{32} 等；全是三水平的，选 L_9，L_{18}，L_{27} 等；全是四水平的，选 L_{16}，L_{64} 等；全是五水平的，选 L_{25} 等；五水平以上没有列出正交表，可用正交拉丁方. 水平数不等的选 $L_{16}(4^3\times 2^6)$，$L_8(4\times 2^4)$ 等.

(B) 根据试验要求来定L表. 要求试验精度高，可取试验次数多的L表；试验费用昂贵的，可取试验次数少的L表. 要分析的交互作用多，选大的L表；已知交互作用小的，可选小的L表.

总之，要具体情况具体分析，灵活运用，不可一概而论.

最后我们还要讲两点，是安排试验时应予考虑的.

(1) 分区组.

对于一批试验，如果要在几台不同的机器（或用几种原料）上进行，为了防止由于机器（或原料）的不同而带来误差，从而干扰试验的分析，那么在安排试验时，可以用L表中未排因素的一列来安排机器（或原料）.

与此类似，如果指标检验需要几个人（或几台仪器）检验，为了消除不同人（仪器）检验的水平不同给试验分析带来干扰，也可采

用在L表中用一列来安排的办法.

如例 3.7 (2)，检验指标时必须在两台设备上进行，为了消除设备的不同对试验的干扰，我们把设备当作一个因素排在第九列上. 凡在该列中为1的，在第一台设备上检验；是2，就在第二台设备上检验.

这样一种办法叫做分区组的办法.

(2) 随机化.

在以上的例子中，每个因素的水平总是由小到大（或由大到小）按顺序排列，按正交表排试验，所有的1水平要碰在一起，而这种极端的情况有时是不希望出现的，有时没有实际意义. 有时希望出现某一个特定的水平组合，最好不要完全按由小到大排列因素水平. 那么，究竟怎么排列水平效果好呢？常用的一种方法叫随机化.

一是对部分因素的水平随机化. 如例 3.7，本来促进剂总量的四个水平是由小到大排列的，即

水 平	1	2	3	4
A	2.9	3.1	3.3	3.5

现对 A 的水平进行随机化. 所谓随机化即非人为地、主观地决定 A 四个水平的位置，而采用抽签（或查随机数表）的办法决定. 抽签的结果是

水 平	1	2	3	4
A	3.3	3.5	2.9	3.1

同样也可对其它因素的水平随机化.

另一是对试验号码随机化. 试验进行的次序不是按正交表的试验号码排列，而是用抽签等办法来决定. 这么作是减少试验中由于先后掌握不匀带来的误差干扰. 这个办法并非对所有试验都适用，有些试验的次序不能随意改变.

两种随机化可以兼而用之，也可只采用一个，这要看具体情况来决定。

下面就转人介绍正交表的分析。

§4 正交表的直观分析

上节介绍了正交表的选择，正交表选定后，进行试验，试验后的数据如何分析呢？我们现在就介绍两种分析方法，一种是直观分析，方法简单直观；另一种是方差分析，这种方法分析得比较精细，但有一定的计算量。后一种方法将在以后介绍。

例 3.8　在试验用不发芽的大麦制造啤酒的过程中(以后简称无芽酶试验)，选了四个因素，每个因素三个水平。考察指标：粉状粒。

水平＼因素	底水 A	浸氨时间 B	920浓度 C	氨水浓度 D
1	136	180	2.5	0.25
2	138	215	3.0	0.26
3	140	250	3.5	0.27

这项试验全是三水平的，应选 L_9，L_{18}，L_{27} 等正交表。由于试验工作量所限，L_{18} 以上一次做不了，于是选 $L_9(3^4)$，按如下表头设计：

列　号	1	2	3	4
因　素	A	B	C	D

对 A 的水平作了随机化

水　平	1	2	3
A	140	136	138

于是因素和水平重新列表如下

水平＼因素	A	B	C	D
1	140	180	2.5	0.25
2	136	215	3.0	0.26
3	138	250	3.5	0.27

用 L_9 安排试验，测得粉状粒数据如下：

表 3.1　无芽酶试验计算表

试验号＼列号	A 1	B 2	C 3	D 4	粉状粒 (%)
1	1	1	1	1	45.5
2	1	2	2	2	33.0
3	1	3	3	3	32.5
4	2	1	2	3	36.5
5	2	2	3	1	32.0
6	2	3	1	2	14.5
7	3	1	3	2	40.5
8	3	2	1	3	33.0
9	3	3	2	1	28.0
K_1	111.0	122.5	93.0	105.5	
K_2	83.0	98.0	97.5	88.0	
K_3	101.5	75.0	105.0	102.0	
$\bar{k}_1$	37.0	40.8	31.0	35.2	
$\bar{k}_2$	27.7	32.7	32.5	29.3	
$\bar{k}_3$	33.8	25.0	35.0	34.0	

表 3.1 的 K_1 表示每列中凡是对应 1 的试验数据相加，如 A 列 $K_1 = 45.5 + 33.0 + 32.5 = 111.0$，$D$ 列 $K_1 = 45.5 + 32.0 + 28.0 = 105.5$，$K_2$，$K_3$ 的意义相同。$\bar{k}_1$，$\bar{k}_2$，$\bar{k}_3$ 是用 K_1，K_2，K_3 除以 3，即它们表示因素三个水平对应的平均粉状粒。这是正交设计的优点，在每个因素都变化的情况下，它仍然能够清楚地分出每个因素对指标的影响大小，知道对应于每个水平的指标平均值。

作因素和指标的关系图，即把每个因素的 $\bar{k}_1$，$\bar{k}_2$，$\bar{k}_3$ 点在坐标纸上。

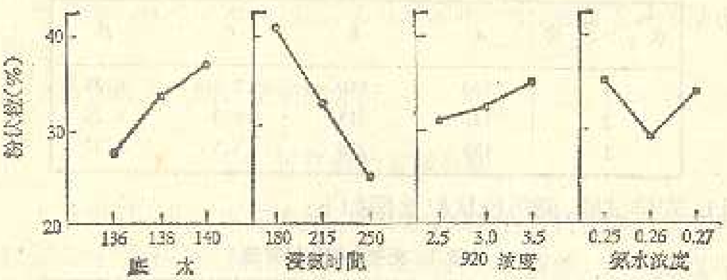


图 3.1 四个因素与粉状粒的关系

粉状粒越高越好，图 3.1 表明：

(1) 底水越大，粉状粒越高，以 140 最高；

(2) 吸氨时间越短，粉状粒越高，以 180 最高；

(3) 920 浓度越大，粉状粒越高，以 3.5 最高；

(4) 氨水浓度为 0.25 时，粉状粒最高.

由以上四点，工艺条件应定在 $A_1B_1C_3D_1$（如果仅考虑粉状粒一个指标）．因最佳点都在试验范围的边界，还应扩大试验范围，寻求更好的工艺条件．

但是，仅分析至此还是不够的，毛主席教导我们：**不能把过程中所有的矛盾平均看待，必须把它们区别为主要的和次要的两类，着重于捉住主要的矛盾，……．**如何分清主次，抓住主要矛盾呢？直观上很容易看出，一个因素对粉状粒影响大，是主要的，那么这个因素不同的水平，相应的平均粉状粒之间差异比较大；一个因素影响不大，是次要的，相应的粉状粒差异较小．反应在图上，点子散布大的因素是主要的；散布小的是次要的．

用上述原则从图 3.1 看出，吸氨时间的三个点子散布最大，是主要矛盾；底水的点子散布稍小，它的影响居第二位．其余两个因素，点子散布都不大，因此可认为它们是次要因素．这样我们就分清了主次，抓住了事物的主要矛盾．

毛主席还教导我们：**然而这种情形不是固定的，矛盾的主要和非主要的方面互相转化着，事物的性质也就随着起变化。**当试验范围改变或试验条件有所变化，矛盾的主要和次要方面可以互

相转化，这一点在实践中是需要很好注意的．

§5 多指标的试验分析

多指标的问题在实际中是大量存在的，多指标的试验分析比单指标要复杂一些，下面通过一个例子讲讲多指标的试验分析．

试验的因素、水平同例 3.7（1），要求考察的指标是：伸长率、变形和屈曲．试验由 $L_{16}(4^5)$ 安排，因为希望出现某特定的水平组合，将 D 的水平作如下变动：

水 平	1	2	3	4
D	30%	25%	35%	40%

试验的结果如下表所示：

表 3.2 橡胶配方试验安排与结果

试验号 \ 列号	A 1	B 2	D 3	M 4	伸长率 (%)	变 形 (%)	屈 曲 (万次)
1	1	1	1	1	545	40	5.0
2	1	2	2	2	490	46	3.9
3	1	3	3	3	515	45	4.1
4	1	4	4	4	505	45	4.7
5	2	1	2	3	492	46	3.2
6	2	2	1	4	485	45	2.5
7	2	3	4	1	499	49	1.7
8	2	4	3	2	480	45	2.0
9	3	1	3	4	566	49	3.6
10	3	2	4	3	539	49	2.7
11	3	3	1	2	511	42	2.7
12	3	4	2	1	515	45	2.9
13	4	1	4	2	533	49	2.7
14	4	2	3	1	488	49	2.3
15	4	3	2	4	495	49	2.3
16	4	4	1	3	476	42	3.3

用上节介绍的方法计算 $K_1 \sim K_4$，$\bar{k}_1 \sim \bar{k}_4$．此时 K_1 是同列四个 1

对应数据之和，$\bar{K}_1=\frac{K_1}{4}$，余类推．计算结果如下：

表 3.3 橡胶配方试验计算表

K 值 \ 指标 / 因素	伸长率				变形				屈曲			
	A	B	D	M	A	B	D	M	A	B	D	M
K_1	2055	2136	2017	2047	176	184	169	183	18.0	14.5	13.5	11.9
K_2	1956	2002	1992	2014	185	189	186	182	9.4	11.4	12.3	11.3
K_3	2131	2020	2049	2022	185	185	188	182	11.9	11.1	12.3	13.9
K_4	1992	1976	2076	2051	189	177	192	188	10.6	12.9	11.8	13.1
$\bar{K}_1$	514	534	504	512	44	46	42	46	4.5	3.6	3.4	3.0
$\bar{K}_2$	489	501	498	504	46	47	47	46	2.4	2.9	3.1	2.8
$\bar{K}_3$	533	505	512	506	46	46	47	46	3.0	2.8	3.1	3.4
$\bar{K}_4$	498	494	519	513	47	44	48	47	2.7	3.2	3.0	3.3

用 $\bar{K}_1$, $\bar{K}_2$, $\bar{K}_3$, $\bar{K}_4$ 的值画图，见图 3.2．由图 3.2 用如下步骤进行分析：

(1) 对每个指标按点波动的大小分出主次．

	主 ——→ 次			
伸长率	A	B	D	M
变　形	D	A	B	M
屈　曲	A	B	M	D

(2) 每个因素选最佳水平．

先选处于主要矛盾地位的指标．如因素 A，对伸长率，屈曲都处于主要矛盾地位，从屈曲来看 A_1 最好（屈曲次数越多越好），从伸长率来看，A_3 和 A_1 最好（伸长率越大越好）．A 在变形指标中处于第二位，从变形来看 A_1 最好（变形越小越好）．综合三个指标 A 取 A_1．

B 在伸长率、屈曲指标中处于第二位，由它们看 B_1 好．在变形指标中以 B_4 最好，但 B 在变形指标中的作用较小，故应以前二者为准，B 取 B_1．这里要注意的一点是，如果指标间不是平等的，

要优先重视主要指标．方才的情况，如变形指标要优先保证，而取 B_1 又达不到国家标准，可考虑取 B_4．

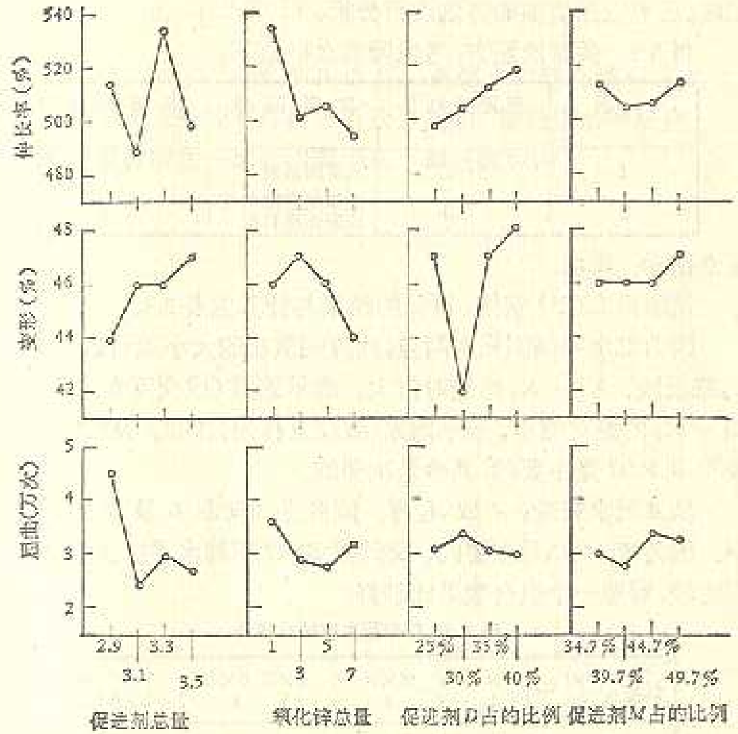


图 3.2 四个因素与三个指标的关系

D 在变形指标中居主要矛盾，在其余指标中居很次要地位，故 D 可完全由变形指标来定，D 取 D_1 好．

最后定 M，M 在伸长率、变形指标中是最次要因素，故可由屈曲指标来定，M 取 M_3 或 M_4．

综上所述，最佳配方为 $A_1B_1D_1M_3$ 或 $A_1B_1D_1M_4$．

多指标的综合平衡是复杂的，数学的分析仅仅给实际工作者提供了一个依据，但最终还需要由专业知识来定．

§6 考虑交互作用的试验分析

前两节的例子都没有考虑交互作用，当试验希望考虑交互作用时，还可以用类似的方法进行分析.

例 3.9 某橡胶配方，考虑因素水平如下：

水平 \ 因素	促进剂总量 A	炭黑品种 B	硫磺分量 C
1	1.5	天津高耐磨	2.5
2	1.0	天津高耐磨与长寿硬炭黑并用	2.0

考察指标：弯曲.

试验用 $L_8(2^7)$ 安排，试验的结果与计算见表 3.4.

因为二水平回图只有两点，两点间散布的大小就可以用 K_1-K_2 来反映. K_1-K_2 的绝对值大，表示因素（或交互作用）重要；K_1-K_2 的绝对值小，表示因素（或交互作用）次要. 从结果来看，A 和 $B\times C$ 是主要的，其余是次要的.

从 A 因素来看，A 取 A_2 好. 问题是如何取 B 及 C 的最优水平. 因为 $B\times C$ 是主要的，我们把 B，C 不同水平组合的结果进行比较，看那一个组合效果比较好.

表 3.4 橡胶配方试验计算表

试验号 \ 列号	A 1	B 2	A×B 3	C 4	A×C 5	B×C 6	7	弯曲（万次）
1	1	1	1	1	1	1		1.5
2	1	1	1	2	2	2		2.0
3	1	2	2	1	1	2		2.0
4	1	2	2	2	2	1		1.5
5	2	1	2	1	2	1		2.0
6	2	1	2	2	1	2		3.0
7	2	2	1	1	2	2		2.5
8	2	2	1	2	1	1		2.0
K_1	7	8.5	8	8	8.5	7		
K_2	9.5	8	8.5	8.5	8	9.5		
K_1-K_2	−2.5	0.5	−0.5	−0.5	0.5	−2.5		

	B_1	B_2
C_1	$\frac{1.5+2.0}{2}=1.75$	$\frac{2.0+2.5}{2}=2.25$
C_2	$\frac{2.0+3.0}{2}=2.50$	$\frac{1.5+2.0}{2}=1.75$

比较四个值，2.5 最大，故取 B_1C_2 好. 最优水平组合就是 $A_2B_1C_2$.

三水平以上的交互作用分析较为复杂，留待以后解决.

正交设计的另一部分内容将在下章继续讨论.